

Difuzijska enačba posplošena za modeliranje Chladnijevih vzorcev

Igor Grabec^{1,*} – Nikolaj Sok²

¹Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Slovenija

²Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Slovenija

Za raziskave mehanskih nihanj in zvoka je Ernst Chladni v osemnajstem stoletju uporabljal opazovanje vzorcev, ki jih tvorijo drobni delci na nihajočih površinah. Čeprav je ta pojav zelo pripomogel k razvoju akustike, je bil njegov model analitično modeliran šele nedavno. V ta namen so bile trajektorije delcev poskakujočih na nihajoči površini optično posnete, numerično analizirane in nato opisane z novim modelom naključnega gibanja, ki ga poganja nihanje površine. V tem gibanju je horizontalni premik $\Delta \mathbf{r}$ v posameznem skoku delca sestavljen iz dveh statistično neodvisnih in normalno porazdeljenih naključnih komponent $(\Delta x, \Delta y)$. Temu ustreza generator premika opisan z enačbo (1), $\Delta \mathbf{r} = CA(\mathbf{r})G$. Pri tem označuje $A(\mathbf{r})$ amplitudo vibracij na mestu $\mathbf{r} = (x, y)$, G pa Gaussov generator. S konstanto C je opisan vpliv amplitude vibracij A na velikost horizontalnega premika $\Delta \mathbf{r}$. Uporabnost tega modela je tukaj prikazana z izračunom razvoja Chladnijevega vzorca na kvadratični plošči, ki je na začetku enakomerno prekrita z delci in nato vzbujena na sredini njenega roba.

Značilnosti izračunanega vzorca se dobro ujemajo z značilnostmi opaženimi pri eksperimentih. Razvoj porazdelitve delcev kaže, da se med oblikovanjem Chladnijevega vzorca delci v povprečju gibljejo iz območja močnih nihanj plošče proti mirnim območjem okoli nodalnih linij. To se dogaja zato, ker je premik $\Delta \mathbf{r}$ v povprečju sorazmeren amplitudi vibracij $A(\mathbf{r})$. Zaradi tega se enakomerna porazdelitev delcev pretvori v vzorec, ki nakazuje nodalne linije.

Ker je naključno poskakovanje delcev med nastajanjem Chladnijevega vzorca podobno Brownovemu gibanju, ga lahko makroskopsko opišemo z difuzijsko enačbo tako, kakor je nakazal Einstein. Prehod od mikroskopskega opisa gibanja posameznih delcev k makroskopskemu opisu porazdelitve delcev omogoča relacija med povprečnim kvadratom premika delcev $\langle |\Delta \mathbf{r}|^2 \rangle$ v časovni intervalu τ ter difuzijskim koeficientom $D = \langle |\Delta \mathbf{r}|^2 \rangle / 2\tau$. Enačba (1) karakterizira posamezni premik s periodo vibracij τ in povprečno vrednostjo kvadrata premika $\langle |\Delta \mathbf{r}|^2 \rangle$, ki je sorazmerna $A(\mathbf{r})^2$. Zaradi tega je difuzijski koeficient $D(\mathbf{r}) = C^2 A(\mathbf{r})^2 \langle |G|^2 \rangle / 2\tau$ odvisen od položaja \mathbf{r} in moramo razvoj gostote delcev $\rho(\mathbf{r}, t)$ v času t opisati z difuzijsko enačbo (2) posplošene oblike $\partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial t = \text{div}[D(\mathbf{r}) \text{grad} \rho(\mathbf{r}, t)]$. Ta enačba je uporabna za določitev razvoja gostote delcev $\rho(\mathbf{r}, t)$ med oblikovanjem Chladnijevega vzorca, če je podana oblika plošče in porazdelitev amplitude nihanja $A(\mathbf{r})$. Ker difuzijski koeficient $D(\mathbf{r})$ ni konstanta, ja za ta namen običajno potrebna numerična obdelava.

Nekatere lastnosti zelo kompleksnega difuzijskega procesa pri oblikovanju Chladnijevih vzorcev je možno napovedati na osnovi splošnih lastnosti vibracijsko poganjanega naključnega gibanja delcev. Ker je difuzijski koeficient $D(\mathbf{r})$ sorazmeren $A(\mathbf{r})^2$, delci difundirajo iz območij z visko amplitudo v mirnejša območja. Posledično se porazdelitev delcev pretvori tako, kakor nakazuje razvijajoči se Chladnijev vzorec. Pri nodalnih linijah sta amplituda $A(\mathbf{r})$ in z njo povezani difuzijski koeficient $D(\mathbf{r})$ zanemarljivo majhna, zato se tam delci kopičijo. Iz poznavanja nodalnih linij ja zato možno napovedati nekatere osnovne lastnosti gostote delcev $\rho(\mathbf{r}, t)$ v razvijajočem se Chladnijevem vzrocu brez reševanja ustrezne difuzijske enačbe.

Kadar je nihanje površine povzročeno z interferenco potujočih valov, lahko uporabimo Chladnijev vzorec tudi za karakterizacijo lastnosti valovne interference. To je delno presenetljivo, ker takšna karakterizacija ustreza makroskopskemu opisu valovne interference s posplošeno difuzijsko enačbo. Zato predpostavljamo, da je za opis naključnega gibanja delcev, ki ga poganjajo potujoči valovi, potrebna bolj splošna obravnava. V ta namen smiselno upoštevati tudi kvantno-mehanski opis gibanja delcev.

Ključne besede: Chladnijevi vzorci, naključno gibanje delcev povzročeno z vibracijami, difuzijski proces